SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Angelo Cavallucci

CONDIZIONI NECESSARIE DI TIPO JACOBI PER PROBLEMI DI CONTROLLO REGOLARI

27 giugno 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. Vengono esposte alcune recenti condizioni necessarie del secondo ordine per problemi di controllo regolari.

Abstract . We present some recent second order necessary conditions for regular control problems.

CONDIZIONI NECESSARIE DI TIPO JACOBI PER PROBLEMI DI CONTROLLO REGOLARI

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il problema di controllo

$$(C) \qquad \begin{cases} l(x(a),x(b)) + \int_a^b L(t,x(t),u(t))\,dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}_i(t) = f_i(t,x(t),u(t)) \ \text{ per } 1 \le i \le n, \\ \Phi_i(x(a),x(b)) = 0 \ \text{ per } 1 \le i \le r, \\ g_i(u(t)) \le 0 \text{ per } i \in I = \{1,2,...,k\}, \\ g_i(u(t)) = 0 \text{ per } i \in \bar{I} = \{k+1,...,s\}, \end{cases}$$

nella classe dei controlli $u(.) : [a,b] \longrightarrow R^m$ continui a tratti (PWC) e delle traiettorie $x(.) : [a,b] \longrightarrow R^n$ assolutamente continue (AC) .

La funzione $u(.) : [a,b] \longrightarrow R^m$ si dice *continua a tratti* se ha un numero finito di punti di discontinuitá e in ogni punto $t \in [a,b]$ ammette limite a sinistra $u(t-0)$ e a destra $u(t+0)$.

Ci proponiamo di esporre alcune condizioni necessarie del secondo ordine che estendono la classica condizione di Jacobi sui punti coniugati nel Calcolo delle Variazioni. Queste condizioni sono dovute al contributo di Zeidan-Zezza [6], Loewen-Zheng [4], Zeidan [5].

Fissiamo a, b reali, $\Omega \subset [a,b] \times R^n$ relativamente aperto e tale che

$$\Omega_t = \{x \in R^n |\ (t,x) \in \Omega\} \neq \emptyset \text{ per } a \le t \le b;$$

fissiamo l'aperto $O \subset R^m$ e le funzioni

$$\Omega \times O \ni (t,x,u) \xrightarrow{F} (f(t,x,u), L(t,x,u)) \in R^n \times R,$$

$$O \ni u \longrightarrow g(u) \in R^s,$$

$$\Omega_a \times \Omega_b \ni (x,y) \longrightarrow l(x,y) \in R,$$

$$\Omega_a \times \Omega_b \ni (x,y) \longrightarrow \Phi(x,y) \in R^r.$$

Supponiamo verificate in tutto il seguito almeno le condizioni (H1)-(H4) che passiamo a elencare

(H1) $F(t,.,.)$ é di classe C^2 per ogni t, $F(.,x,u)$ e le sue derivate prime e seconde in (x,u) sono continue a tratti e si ha

$$|F(t,x,u)| + |\nabla_{(x,u)} F(t,x,u)| + |\nabla^2_{(x,u)} F(t,x,u)| \le k(t)$$

per ogni $(t, x, u) \in \Omega \times O$, con $k(.) \in L^1(a, b)$.

Usiamo i simboli per $x, y \in R^n$

$$xy = x^T y =< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

$$yM = M^T y,$$

dove M^T indica la trasposta della matrice M.

I simboli $\nabla_x F = F_x$ e $\nabla_u \nabla_x F = F_{ux}$ sono definiti dalle formule

$$F_x(t, x, u)y = \sum_{i=1}^{n} y_i (\frac{\partial}{\partial x_i}) F(t, x, u),$$

$$vF_{ux}(t, x, u)y = \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{n} y_i (\frac{\partial}{\partial u_j})(\frac{\partial}{\partial x_i}) F(t, x, u).$$

(H2) l, Φ, g sono di classe C^2.

Poniamo

$$U = \{u \in O |\ g_i(u) \leq 0 \text{ per } i \in I,\ g_i(u) = 0 \text{ per } i \in \bar{I}\}.$$

La coppia di funzioni

$$[a, b] \ni t \longrightarrow u(t) \in U \text{ q.d.},$$

$$[a, b] \ni t \longrightarrow x(t) \in \Omega_t$$

si dirá *ammissibile* per il problema (C) se $u(.) \in PWC(a, b)$, $x(.) \in AC(a, b)$ e

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ q.d. su } [a, b],$$

$$\Phi(x(a), x(b)) = 0.$$

La coppia ammissibile $(\tilde{x}(.), \tilde{u}(.))$ si dirá *localmente ottima* se, per qualche $\tilde{\epsilon} > 0$,

$$J(x(.), u(.)) = l(x(a), x(b)) + \int_a^b L(t, x(t), u(t))\, dt \geq J(\tilde{x}(.), \tilde{u}(.))$$

per ogni copia ammissibile $(x(.), u(.))$ tale che

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \tilde{\epsilon}.$$

Fissiamo per tutto il seguito la coppia $(\tilde{x}(.), \tilde{u}(.))$ localmente ottima, per la quale supponiamo verificate le condizioni (H3), (H4) seguenti:

(H3) $M = \nabla\Phi(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b))$ ha rango r;

(H4) posto

$$I(u) = \{i \in I |\ g_i(u) = 0\},$$

esiste la costante $M > 0$ tale che

$$(1) \qquad |\sum_{i \in I(u) \cup \bar{I}} z_i \nabla g_i(u)| \geq M(\sum_i z_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni z_i reale e per ogni

$$u \in \{\tilde{u}(t-0), \tilde{u}(t+0)\},\ a \leq t \leq b.$$

Se $\{\nabla g_i(u) |\ i \in H\}$, $H \subset I \cup \bar{I}$, é linearmente indipendente e se

$$g_H(u) = [g_i(u)]_{i \in H},$$

poniamo

$$(2) \qquad W_H(u) = \nabla g_H(u)^T (\nabla g_H(u) \nabla g_H(u)^T)^{-1}.$$

Allora

$$z = W_H(u) c_H$$

é soluzione del sistema

$$< z, \nabla g_i(u) >= c_i,\ i \in H,$$

equivalente a

$$\nabla g_H(u) z = c_H.$$

In seguito useremo il seguente

Lemma 1. *Supponiamo $\tilde{u}(.)$ continua su $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [a, b], H \subset I(\tilde{u}(t)) \cup \bar{I}$ per $\bar{a} \leq t \leq \bar{b}$,*

$$|\sum_{i \in H} z_i \nabla g_i(\tilde{u}(t))| \geq M(\sum_{i \in H} z_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

per $\bar{a} \leq t \leq \bar{b}$, $z_i \in R$. Allora esistono $r > 0$ e la funzione

$$[\bar{a}, \bar{b}] \times \{z \in R^m |\ |z| \leq r\} \ni (t, z) \longrightarrow \gamma(t, z) \in R^H$$

continua, di classe C^2 rispetto a z e con γ_z e γ_{zz} continue, e tale che

$$\tilde{u}(t) + z + \nabla g_H(\tilde{u}(t))^T \gamma(t, z) \in O,$$

$$\gamma(t, 0) = 0,$$

$$g_H(\tilde{u}(t) + z + \nabla g_H(\tilde{u}(t))^T \gamma(t, z)) = 0$$

per $\bar{a} \leq t \leq \bar{b}$, $|z| \leq r$.

Per la dimostrazione si puó applicare il Teorema 7.2 di [3] alla funzione

$$G(t, z, \gamma) = g_H(\tilde{u}(t) + z + \nabla g_H(u)^T \gamma),$$

per la quale si ha

$$G(t, 0, 0) = 0,$$

$$G_\gamma(t, 0, 0) \text{ invertibile per } \bar{a} \leq t \leq \bar{b}.$$

Posto

$$H(t, x, u, p, \lambda, \lambda_0) = < p, f(t, x, u) > + \lambda_0 L(t, x, u) + \sum_{i \in I \cup \bar{I}} \lambda_i g_i(u), \tag{3}$$

per il problema (C) vale il seguente Principio di Minimo di Pontryagin (cfr. [1], [3])

Teorema 1. *Nelle condizioni (H1)-(H4) indicate sopra, esistono* $p(.) \in AC(a, b)$, $\lambda_i \in PWC(a, b)$ *per* $i \in I \cup \bar{I}$, $\lambda_0 \in R$, $\gamma_i \in R$ *per* $1 \leq i \leq r$ *tali che (per quasi ogni t)*

a)
$$\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_0 + |\lambda(t)| + |p(t)| + |\gamma| > 0;$$

b)
$$-\dot{p}(t) = \nabla_x H(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), p(t), \lambda(t), \lambda_0),$$
$$\begin{bmatrix} -p(a) \\ p(b) \end{bmatrix} = \lambda_0 \nabla l(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b)) + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \nabla \Phi_i(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b));$$

c)
$$\min_{u \in U} [< p(t), f(t, \tilde{x}(t), u) > + \lambda_0 L(t, \tilde{x}(t), u)] = [< p(t), \tilde{f}(t) > + \lambda_0 \tilde{L}(t)];$$

d)
$$\nabla_u H(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), p(t), \lambda(t), \lambda_0) = 0;$$

e)
$$\lambda_i(t) \geq 0 = \lambda_i(t) g_i(\tilde{u}(t)) \quad \textit{per} \quad i \in I.$$

Qui si é usata la notazione

$$\tilde{\phi}(t) = \phi(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)).$$

Diremo *estremale* per (C) la coppia ammissibile $(x(.), u(.))$ se esistono $p(.), \lambda_0$, $\lambda_i(.), \gamma_i$ che verificano, insieme con $(x(.), u(.))$, le condizioni a),b,d,e) precedenti. Tale estremale si dirá *debolmente normale* se é possibile prendere $\lambda_0 = 1$, mentre si dirá *estremale normale* se non puó essere $\lambda_0 = 0$.

Sia $Z(.) \in AC(a, b)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = -Z(t) f_x(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \ a \leq t \leq b, \\ Z(b) = I = \text{ matrice unitá.} \end{cases} \tag{4}$$

Fra i risultati principali di [5] figura il seguente

Teorema 2. *Mettiamoci nelle ipotesi del Teorema 1 e supponiamo inoltre che la coppia localmente ottima* $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ *sia un estremale debolmente normale con* $\lambda_0 = 1$ *e che le funzioni*

$$I(t) = \{i \in I|\ g_i(\tilde{u}(t)) = 0\} = I(\tilde{u}(t)),$$
$$I_>(t) = \{i \in I|\ \lambda_i(t) > 0\}$$

siano in $PWC(a,b)$ *e quindi costanti a tratti.*

Allora vale una delle due affermazioni seguenti

a) esiste $0 \neq d \in R^r$ *tale che*

$$dM\begin{bmatrix} I \\ Z(a) \end{bmatrix} = 0,$$
$$< d, M\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} Z(t)\tilde{f}_u(t)v(t) > \geq 0 \quad q.d.$$

per ogni $v(.) \in \mathcal{V}(a,b)$*;*

b)
$$\begin{cases} \min J_2(\eta(.), v(.)) = 0 \\ \dot{\eta}(t) = \tilde{f}_x(t)\eta(t) + \tilde{f}_u(t)v(t), \\ \nabla\Phi(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b))\left[\begin{smallmatrix}\eta(a)\\ \eta(b)\end{smallmatrix}\right] = 0, \\ \eta(.) \in AC(a,b),\ v(.) \in \mathcal{V}(a,b), \end{cases}$$

dove

$$V(t) = \left\{ v \in R^m \left| \begin{array}{l} \nabla g_i(\tilde{u}(t))v = 0 \ per\ i \in I_>(t) \cup \bar{I}, \\ \nabla g_i(\tilde{u}(t))v \leq 0 \ per\ i \in I(t) \backslash I_>(t) \end{array} \right. \right\},$$
$$\mathcal{V}(a,b) = \{v(.) \in PWC(a,b)|\ v(t) \in V(t) \quad q.d.\ \},$$
$$\Gamma = \nabla^2 l(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b)) + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \nabla^2 \Phi_i(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b)),$$
$$J_2(\eta(.), v(.)) = \frac{1}{2} < \Gamma\begin{bmatrix}\eta(a)\\ \eta(b)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\eta(a)\\ \eta(b)\end{bmatrix} > + \frac{1}{2}\int_a^b < \nabla^2_{(x,u)}\tilde{H}\begin{bmatrix}\eta(t)\\ v(t)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\eta(t)\\ v(t)\end{bmatrix} > dt.$$

D'ora in poi tutte le soluzioni delle equazioni differenziali considerate si supporranno tacitamente assolutamente continue.

Osservazione 1.- Il problema classico del Calcolo delle Variazioni a estremi fissi é un caso particolare di (C) per

$$f(t,x,u) = u,\ l(x,y) = 0,\ \Phi(x,y) = (x - A, y - B)$$

e il problema che figura in b) in questo caso diventa il *problema accessorio* (cfr [1], [2], [3]).

Osservazione 2.- Il caso in cui in (C) si ha

$$U = \{u \in O |\ g_i(u) = 0 \text{ per } i \in \bar{I}\}$$

é trattato in [6].

Osservazione 3.- In [4] é considerato il problema (C) in cui sono aggiunte le ipotesi

$$l(x,y) = l(y),\ \Phi(x,y) = (x - A, \phi(y)),\ U = \text{ convesso}$$

e con

$$V(t) = \left\{ v \in R^m \left| \begin{array}{l} \nabla g_i(\tilde{u}(t))v = 0 \text{ per } i \in I_>(t) \cup \bar{I}, \\ \nabla g_i(\tilde{u}(t))v + g_i(\tilde{u}(t)) \leq 0 \text{ per } i \in I(t) \backslash I_>(t) \end{array} \right. \right\},$$

$$I(\tilde{u}(t)) \subset I(t) \subset I,\ I(t) \text{ opportuno}.$$

Indichiamo i punti principali della dimostrazione del Teorema 2, seguendo [5].

I) Per la soluzione $\eta(.) \in AC(a,b)$, $v(.) \in PWC(a,b)$ del problema

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \tilde{f}_x(t)\eta(t) + \tilde{f}_u(t)v(t),\ a \leq t \leq b, \\ M \begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix} = y \in R^r \end{cases}$$

si ha

$$\eta(t) = Z(t)^{-1}[Z(a)\eta(a) + \int_a^t Z(s)\tilde{f}_u(s)v(s)\,ds]$$

e quindi

$$\eta(b) = Z(a)\eta(a) + \int_a^b Z(s)\tilde{f}_u(s)v(s)\,ds,$$

$$y = M\left(\begin{bmatrix} I \\ Z(a) \end{bmatrix} \eta(a) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \int_a^b \tilde{f}_u(s)v(s)\,ds \right) = \Lambda(\eta(a), v(.))$$

e l'operatore lineare

$$\Lambda : R^n \times PWC(a,b) \longrightarrow R^r$$

é continuo rispetto alla norma usuale di R^n e alla norma di $L^2(a,b)$ su $PWC(a,b)$.

L'insieme $\Lambda(R^n \times \mathcal{V}(a,b))$ é un cono convesso in R^r con vertice in 0.

Se riesce

$$0 \in \text{ frontiera di } \Lambda(R^n \times \mathcal{V}(a,b)),$$

allora esiste $0 \neq d \in R^r$ tale che

$$< d, \Lambda(z, v(.)) > \geq 0 \text{ per ogni } z \in R^n,\ v(.) \in \mathcal{V}(a,b).$$

Ne segue

$$< d, \Lambda(z, 0 >= 0 \text{ per ogni } z \in R^n,$$
$$< d, \Lambda(0, v(.)) > \geq 0 \text{ per ogni } v(.) \in \mathcal{V}(a,b)$$

e di qui segue l'affermazione a) del teorema.

Se riesce

$$0 \in \text{ interno di } \Lambda(R^n \times \mathcal{V}(a,b)),$$

allora si ha

$$(i) \qquad \Lambda(R^n \times \mathcal{V}(a,b)) = R^r$$

e in questo caso si prova che vale l' affermazione b) del teorema, come indicato brevemente nei punti II)-VI) che seguono.

II) Poiché le funzioni $t \longrightarrow \tilde{u}(t), I(t), I_>(t), \tilde{f}_x(t), \tilde{f}_u(t)$ sono in $PWC(a,b)$, esistono i punti t_k tali che

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_q = b$$

e tutte le funzioni precedenti sono continue in ogni intervallo $]t_k, t_{k+1}[$ e hanno limite nei due estremi.

Per $0 \leq \delta \leq \bar{\delta} = \frac{1}{2}\min_k(t_{k+1} - t_k)$ poniamo

$$S_\delta = \bigcup_{k=1}^{q} [t_k + \delta, t_{k+1} - \delta],$$

$$\mathcal{V}_\delta = \{v(.) \in PWC(a,b) |\ v(t) \in V(t) \ \text{ per } \ t \in S_\delta, v(t) = 0 \ \text{ per } \ t \notin S_\delta\}$$

Da (i) segue ([5], Lemma 4.3) che esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$(ii) \qquad \Lambda(R^n \times \mathcal{V}_\delta) = R^r \ \text{ per } \ 0 \leq \delta \leq \delta_0.$$

III) Fissiamo $v(.) \in \mathcal{V}$, $\eta(.) \in AC(a,b)$ tali che

$$(iii) \qquad \Lambda(\eta(a), v(.)) = 0.$$

É possibile prendere δ_0 in (ii) tale che per ogni $\delta \in]0, \delta_0]$ esistano $v_\delta \in \mathcal{V}_\delta$, $\eta_\delta(.) \in AC(a,c)$ che verificano le condizioni

$$\begin{aligned}
&\Lambda(\eta_\delta(a), v_\delta(.)) = 0 \ \text{ per } \ 0 < \delta \leq \delta_0, \\
&\eta_\delta(t) \longrightarrow \eta(t) \ \text{ per } \ \delta \longrightarrow 0,\ a \leq t \leq b, \\
&\parallel v_\delta(.) - v(.), L^2(a,b) \parallel \longrightarrow 0 \ \text{ per } \ \delta \longrightarrow 0, \\
&J_2(\eta_\delta(a), v_\delta(.)) \longrightarrow J_2(\eta(a), v(.)) \ \text{ per } \ \delta \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Dunque basta provare il punto b) del teorema per la coppia $(\eta_\delta(.), v_\delta(.))$. D'ora in poi consideriamo esclusivamente la coppia $(\eta_\delta(.), v_\delta(.))$ che indichiamo semplicemente con $(\eta_(.), v_(.))$.

Sia $\{e_1, ..., e_r\}$ una base di R^r. Segue da (ii) che esistono $\eta_j(.) \in AC(a,b), v_j(.) \in \mathcal{V}_\delta$ tali che

$$(iv) \qquad \Lambda(\eta_j, v_j(.)) = e_j,\ 1 \leq j \leq r.$$

IV) Indichiamo con $[\bar{a}, \bar{b}]$ uno qualunque degli intervalli $[t_k, t_{k+1}]$ e supponiamo δ_0 abbastanza piccolo in modo da avere

$$\left|\sum_{i\in\mathcal{I}_{\bar{a}}} z_i \nabla g_i(\tilde{u}(t))\right| \geq \frac{M}{2}(\sum_i z_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{per} \quad \bar{a} < t \leq \bar{a} + \delta_0,$$

$$\left|\sum_{i\in\mathcal{I}_{\bar{b}}} z_i \nabla g_i(\tilde{u}(t))\right| \geq \frac{M}{2}(\sum_i z_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{per} \quad \bar{b} - \delta_0 < t \leq \bar{b},$$

con

$$\mathcal{I}_{\bar{a}} = I(\tilde{u}(\bar{a}+0)) \cup \bar{I},$$
$$\mathcal{I}_{\bar{b}} = I(\tilde{u}(\bar{b}-0)) \cup \bar{I}.$$

Per ipotesi $I(t)$ e $I_>(t)$ sono costanti su $]\bar{a}, \bar{b}[$. Poniamo

$$\mathcal{I} = I(t),\ \mathcal{I}_> = I_>(t) \cup \bar{I} \quad \text{per} \quad \bar{a} < t < \bar{b}$$

e osserviamo che

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\bar{a}} \cap \mathcal{I}_{\bar{b}}.$$

Poniamo anche $(0 < \delta \leq \delta_0)$

$$c_i(t) = -\frac{1}{2} < \nabla^2 g_i(\tilde{u}(t))v(t), v(t) > \quad \text{per} \quad i \in \mathcal{I}_>,\ \bar{a} < t < \bar{b},$$
$$c_i(t) = -\frac{1}{2} < \nabla^2 g_i(\tilde{u}(t))v(t), v(t) > -1 \quad \text{per} \quad i \in I \cup \bar{I} \backslash \mathcal{I}_>,\ \bar{a} < t < \bar{b},$$

$$w_0(t) = W_{\mathcal{I}_{\bar{a}}}(\tilde{u}(t))c_{\mathcal{I}_{\bar{a}}}(t) \quad \text{per} \quad \bar{a} < t \leq \bar{a} + \delta,$$
$$w_0(t) = W_{\mathcal{I}}(\tilde{u}(t))c_{\mathcal{I}}(t) \quad \text{per} \quad \bar{a} + \delta < t < \bar{b} - \delta,$$
$$w_0(t) = W_{\mathcal{I}_{\bar{b}}}(\tilde{u}(t))c_{\mathcal{I}_{\bar{b}}}(t) \quad \text{per} \quad \bar{b} - \delta \leq t < \bar{b}$$

Dunque resta definita $w_0(.) \in PWC(a, b)$ tale che su ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}] = [\bar{a}, \bar{b}]$ si ha

$$\nabla g_i(\tilde{u}(t))w_0(t) + \frac{1}{2} < \nabla^2 g_i(\tilde{u}(t))v(t), v(t) >= 0 \quad \text{per} \quad i \in \mathcal{I}_>,\ \bar{a} < t < \bar{b},$$

$$\nabla \tilde{g}_i(t)w_0(t) + \frac{1}{2} < \nabla^2 \tilde{g}_i(t)v(t), v(t) >= -1 \quad \text{per} \quad \begin{cases} i \in \mathcal{I}_{\bar{a}} \backslash \mathcal{I}_>,\ a < t \leq \bar{a} + \delta \\ i \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_>,\ \bar{a} + \delta < t < \bar{b} - \delta \\ i \in \mathcal{I}_{\bar{b}} \backslash \mathcal{I}_>,\ \bar{b} - \delta \leq t < \bar{b} \end{cases}$$

Posto

$$\zeta(t) = \frac{1}{2}(< \tilde{f}_{xx}\eta(t), \eta(t)) > +2 < \tilde{f}_{ux}\eta(t), v(t) > + < \tilde{f}_{uu}v(t), v(t) >),$$

$$\chi = \frac{1}{2} < \nabla^2 \Phi(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b)) \begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix} >,$$

sia

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0(t) = \tilde{f}_x(t)\xi_0(t) + \tilde{f}_u(t)w_0(t) + \zeta(t), \ a \le t \le b, \\ \xi_0(a) = 0 \end{cases}$$

Segue da (ii) che esistono $\xi_1(t) \in AC(a,b)$ e $w_1(.) \in \mathcal{V}_\delta$ tali che

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \tilde{f}_x(t)\xi_1(t) + \tilde{f}_u(t)w_1(t), \ a \le t \le b, \\ M\begin{bmatrix}\xi_1(a)\\ \xi_1(b)\end{bmatrix} = -M\begin{bmatrix}\xi_0(a)\\ \xi_0(b)\end{bmatrix} - \chi \end{cases}$$

Dunque, posto

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1(t),$$

$$w(t) = w_0(t) + w_1(t),$$

abbiamo ottenuto $\xi(.) \in AC(a,b)$, $w \in PWC(a,b)$ tali che (la variabile t é omessa nella prima e nell' ultima formula)

$$(v) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{f}_x\xi + \tilde{f}_u w + \frac{1}{2}(< \tilde{f}_{xx}\eta, \eta > +2 < \tilde{f}_{ux}\eta, v > + < \tilde{f}_{uu}v, v >) \\ M\left[\begin{smallmatrix}\xi(a)\\ \xi(b)\end{smallmatrix}\right] + \frac{1}{2} < \nabla^2\Phi(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b))\left[\begin{smallmatrix}\eta(a)\\ \eta(b)\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\eta(a)\\ \eta(b)\end{smallmatrix}\right] >= 0 \\ \nabla\tilde{g}_i(t)w(t) + \frac{1}{2} < \nabla^2\tilde{g}_i(t)v(t), v(t) >= 0 \ \text{ per } \ i \in \mathcal{I}_>, \ \bar{a} < t < \bar{b}, \\ \nabla\tilde{g}_i w + \frac{1}{2} < \nabla^2\tilde{g}_i v, v > \le -1 \ \text{ per } \ \begin{cases} i \in \mathcal{I}_{\bar{a}} \backslash \mathcal{I}_>, \ a < t \le \bar{a} + \delta \\ i \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_>, \ \bar{a} + \delta < t < \bar{b} - \delta \\ i \in \mathcal{I}_{\bar{b}} \backslash \mathcal{I}_>, \ \bar{b} - \delta \le t < \bar{b} \end{cases} \end{cases}$$

qualunque sia $[\bar{a}, \bar{b}] = [t_k, t_{k+1}]$.

Poniamo

$$z(t, \epsilon, \alpha) = \epsilon v(t) + \epsilon^2 w(t) + \sum_1^r \alpha_i v_i(t), \quad \text{per } \ \bar{a} < t < \bar{b},$$

con $|\epsilon| \le \epsilon_0$, $|\alpha_i| \le \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$.

Se $\mathcal{I}_> = \emptyset$ poniamo

$$u(t, \epsilon, \alpha) = \tilde{u}(t) + z(t, \epsilon, \alpha)$$

con ϵ_0 tale che $u(t, \epsilon, \alpha) \in O$.

Se $\mathcal{I}_> \neq \emptyset$ applichiamo il Lemma 1 con $H = \mathcal{I}_>$ e ϵ_0 convenientemente piccolo, dopo avere prolungato per continuitá $\tilde{u}(.)$ su $[\bar{a}, \bar{b}]$, e poniamo

$$u(t, \epsilon, \alpha) = \tilde{u}(t) + z(t, \epsilon, \alpha) + \nabla g_H(\tilde{u}(t))^T \gamma(t, z(t, \epsilon, \alpha)), \ \bar{a} < t < \bar{b},$$

per $|\epsilon| \le \epsilon_0$, $|\alpha_i| \le \epsilon_0$.

Resta in tal modo definita la funzione $u(t, \epsilon, \alpha)$ tale che $u(., \epsilon, \alpha) \in PWC(a,b)$, $u(t, ., .)$ é di classe C^2 e

$$g_i(u(t, \epsilon, \alpha)) = 0 \ \text{ per } \ i \in I_>(t) \cup \bar{I} \neq \emptyset,$$

$$u_\epsilon(t,0,0) = v(t),\ u_{\alpha_i}(t,0,0) = v_i(t),$$
$$u_{\epsilon\epsilon}(t,0,0) = 2w(t)$$

V) Se ϵ_0 é abbastanza piccolo, ha soluzione il problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t,\epsilon,\alpha) = f(t,x(t,\epsilon,\alpha),u(t,\epsilon,\alpha)),\ a \le t \le b, \\ x(a,\epsilon,\alpha) = \tilde{x}(a) + \epsilon\eta(a) + \epsilon^2\xi(a) + \sum_1^r \alpha_i\eta_i(a), \end{cases}$$

e tale soluzione é di classe $C^2_{\epsilon,\alpha}$ e inoltre si puó derivare nel sistema precedente sia rispetto a ϵ che a α_i e si ottiene, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy,

$$x_\epsilon(t,0,0) = \eta(t),\ x_{\alpha_i}(t,0,0) = \eta_i(t),$$
$$x_{\epsilon\epsilon}(t,0,0) = 2\xi(t).$$

Ora si puó applicare il teorema delle funzioni implicite all'equazione

$$\Phi(x(a,\epsilon,\alpha),x(b,\epsilon,\alpha)) = 0$$

e ottenere (eventualmente diminuendo ϵ_0)

$$\alpha = \alpha(\epsilon) \quad \text{per} \quad |\epsilon| \le \epsilon_0$$

con $\alpha(.)$ di classe C^2 e tale che

$$\alpha_i'(0) = 0 = \alpha_i''(0).$$

Infine si pone

$$u(t,\epsilon) = u(t,\epsilon,\alpha(\epsilon)),\ a < t < b,$$
$$x(t,\epsilon) = x(t,\epsilon,\alpha(\epsilon)),\ a < t < b,$$

e si ottiene, per $|\epsilon| \le \epsilon_0$,

$$\dot{x}(t,\epsilon) = f(t,x(t,\epsilon),u(t,\epsilon)),\ a < t < b,$$

$$\Phi(x(a,\epsilon),x(b,\epsilon)) = 0,$$
$$u(t,0) = \tilde{u}(t),\ x(t,0) = \tilde{x}(t),$$
$$u_\epsilon(t,0) = v(t),\ x_\epsilon(t,0) = \eta(t),$$
$$u_{\epsilon\epsilon}(t,0) = 2w(t),\ x_{\epsilon\epsilon}(t,0) = 2\xi(t),$$
$$g_i(u(t,\epsilon)) = 0 \quad \text{per} \quad i \in I_>(t) \cup \bar{I} \ne \emptyset.$$

Verifichiamo che si ha anche

$$g_i(u(t,\epsilon)) \le 0 \quad \text{per} \quad i \in I \backslash I_>(t).$$

Sull'intervallo $[\bar{a}, \bar{b}] = [t_k, t_{k+1}]$ si ha

$$g_i(u(t,\epsilon)) = g_i(\tilde{u}(t)) + \epsilon \nabla g_i(\tilde{u}(t))v(t) + \frac{\epsilon^2}{4}\{\nabla g_i(\tilde{u}(t))w(t) +$$

$$\frac{1}{2} < \nabla^2 g_i(\tilde{u}(t))v(t), v(t) > + \omega_i(t,\epsilon)\},$$

con

$$\sup_{\bar{a}<t<\bar{b}} \omega_i(t,\epsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad \epsilon \longrightarrow 0+ .$$

Poniamo

$$\psi_i(t) = \nabla g_i(\tilde{u}(t))w(t) + \frac{1}{2} < \nabla^2 g_i(\tilde{u}(t))v(t), v(t) > .$$

Sono possibili vari casi.

Se $i \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_>$, allora si ha da (v)

$$g_i(\tilde{u}(t)) = 0, \ \nabla g_i(\tilde{u}(t)) \leq 0, \ \psi_i(t) \leq -1$$

e quindi, diminuendo eventualmente ϵ_0,

$$g_i(u(t,\epsilon)) < 0 \quad \text{per} \quad \bar{a} < t < \bar{b}, \ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Se $i \in I \backslash \mathcal{I}$, allora si ha

$$g_i(\tilde{u}(t)) < 0 \quad \text{per} \quad \bar{a} < t < \bar{b}$$

e quindi

$$g_i(\tilde{u}(\bar{a}+0)) \leq 0, \ g_i(\tilde{u}(\bar{b}-0)) \leq 0,$$

$$\min\{g_i(\tilde{u}(t)) | \ \bar{a}+\delta \leq t \leq \bar{b}-\delta\} < 0.$$

Ne segue, eventualmente diminuendo ϵ_0,

$$g_i(u(t,\epsilon)) < 0 \quad \text{per} \quad \bar{a}+\delta \leq t \leq \bar{b}-\delta, \ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Analogamente, se $g_i(\tilde{u}(\bar{a}+0)) < 0$, si ottiene

$$g_i(u(t,\epsilon)) < 0 \quad \text{per} \quad \bar{a}, < t < \bar{a}+\delta$$

e se $g_i(\tilde{u}(\bar{b}-0)) < 0$ si ottiene

$$g_i(u(t,\epsilon)) < 0 \quad \text{per} \quad \bar{b}-\delta < \bar{b}.$$

Se $g_i(\tilde{u}(\bar{a}+0)) = 0$, si ha $i \in \mathcal{I}_{\bar{a}} \backslash \mathcal{I}_>$ e quindi

$$g_i(\tilde{u}(t)) < 0, \ v(t) = 0, \ \psi_i(t) \leq -1$$

Dunque si ha ancora

$$g_i(u(t,\epsilon)) < 0 \quad \text{per} \quad \bar{a}, < t < \bar{a}+\delta, \ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Analogamente si procede nel caso di $g_i(\bar{u}(\bar{b}-0)) = 0$.

Dunque possiamo concludere che la coppia $(x(.,\epsilon), u(.,\epsilon))$ é ammissibile per il problema (C) per $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ e di classe C^2 rispetto a ϵ.

VI) Poniamo

$$h(\epsilon) = l(x(a,\epsilon), x(b,\epsilon)) + \int_a^b L(t, x(t,\epsilon), u(t,\epsilon))\, dt, \ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Allora si ha

$$h(\epsilon) \geq h(0) \ \text{ per } \ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0,$$

$$h'(0) = \nabla l(\tilde{x}(a), \tilde{x}(b)) \begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix} + \int_a^b (\tilde{L}_x(t)\eta(t) + \tilde{L}_u(t)v(t))\, dt =$$

$$= -\int_a^b \{ \sum_{i \in I \cup \bar{I}} \lambda_i(t) \nabla g_i(\bar{u}(t)) v(t) \}\, dt = 0$$

e quindi deve essere, ricorrendo a (v) e al Teorema 1,

$$0 \leq h''(0) = J_2(\eta(.), v(.)).$$

Consideriamo la seguente definizione, seguendo [5],

Definizione.- Il punto $c \in]a,b[$ si dice *accoppiato con* b se esistono $v(.) \in \mathcal{V}(c,b)$, $q_b \in R^n$, $\eta_b \in R^n$, $\alpha \in R^r$ tali che, posto

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v(t) & \text{per } \ c \leq t \leq b \\ 0 & \text{per } \ a \leq t < c, \end{cases}$$

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{f}_x(t)\eta(t) + \tilde{f}_u(t)\bar{v}(t) \ \text{ per } \ a \leq t \leq b, \qquad \eta(b) = \eta_b,$$

$$-\dot{q}(t) = \tilde{f}_x(t)^T q(t) + \tilde{H}_{xx}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{xu}(t)\bar{v}(t) \ \text{ per } \ a \leq t \leq b, \qquad q(b) = q_b,$$

sono verificate le condizioni

$$(A1) \qquad M \begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix} = 0;$$

$$(A2) \qquad \begin{bmatrix} -q(a) \\ q(b) \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix} + \alpha M;$$

$$(A3) \qquad < \tilde{f}_u(t)^T q(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)v(t), v(t) > \leq 0 \ \text{ q.d. su } \ [c,b];$$

$$(A4) \qquad < \tilde{f}_u(t)^T q(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)v(t), v(t) > < 0$$

in un insieme di misura positiva oppure il primo membro in (A4) é nullo quasi dappertutto e per ogni $d \in R^r$ tale che

$$\begin{cases} dM_1 + dM_2 Z(a) = 0, \\ < \tilde{f}_u(t)^T [q(t) + dM_2 Z(t)] + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)v(t), w(t) > \geq 0 \ \text{ q.d. su } \ [c,b] \end{cases}$$

per ogni $w(.) \in \mathcal{V}(c,b)$, esiste $v_1 \in \mathcal{V}(a,c)$ per cui si ha

$$(A'4) \qquad < \eta_1(c), q(c) + dM_2 Z(c) > + \int_a^c < \tilde{H}_{xx}\eta_1 + \tilde{H}_{xu}v_1, \eta > \, dt < 0,$$

dove

$$\dot{\eta}_1(t) = \tilde{f}_x(t)\eta_1(t) + \tilde{f}_u(t)v_1(t) \ \text{ per } \ a \leq t \leq c, \qquad \eta_1(a) = 0.$$

Teorema 3. *Sotto le ipotesi del Teorema 2 si ha*
a) esiste $0 \neq d \in R^r$ *tale che*

$$dM\begin{bmatrix} I \\ Z(a) \end{bmatrix} = 0,$$
$$< d, M\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} Z(t)\tilde{f}_u(t)^T v(t) > \geq 0 \quad q.d. \ su \ [a,b]$$

per ogni $v(.) \in \mathcal{V}(a,b)$ *; oppure*
b) non esistono in $]a,b[$ *punti accoppiati con* b.

Basta provare che dalla condizione b) del Teorema 2 segue che non esistono punti $c \in]a,b[$ accoppiati con b. Seguendo [5], ragioniamo per assurdo supponendo che esista $c \in]a,b[$ accoppiato con b. Allora si ha, con

$$\rho(t) = \tilde{f}_u(t)^T q(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)\bar{v}(t), \ a \leq t \leq b,$$

$$J_2(\eta(.), \bar{v}(.)) = \frac{1}{2}\int_a^b < \rho(t), \bar{v}(t) > dt = \frac{1}{2}\int_c^b < \rho(t), v(t) > dt \leq 0$$

a causa della condizione (A3). Per il Teorema 2, deve essere $J_2(\eta(.), \bar{v}(.)) \geq 0$ e quindi ora deve essere

$$< \rho(t), \bar{v}(t) >= 0 \ \text{ q.d. su } \ [a,b]$$

e deve verificarsi la seconda alternativa nella condizione (A4).

Allora la coppia $(\eta(.), \bar{v}(.))$ minimizza il problema considerato nella condizione b) del Teorema 2 e si puó applicare il Principio di Minimo debole di [1] (Theor.7.1.i, Second Proof, E. Alternate Assumptions and Other Remarks) e ottenere $\sigma \in R^r$ e $\bar{q}(.) \in AC(a,b)$, tali che

$$-\dot{\bar{q}}(t) = \tilde{f}_x(t)^T \bar{q}(t) + \tilde{H}_{xx}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{xu}(t)\bar{v}(t) \ \text{ q.d. su } [a,b],$$
$$\begin{bmatrix} -\bar{q}(a) \\ \bar{q}(b) \end{bmatrix} = \Gamma\begin{bmatrix} \eta(a) \\ \eta(b) \end{bmatrix} + \sigma M,$$
$$< \tilde{f}_u(t)^T \bar{q}(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)\bar{v}(t), w(t) > \geq 0 \ \text{ q.d. su } [a,b]$$

per ogni $w(.) \in \mathcal{V}(a,b)$.
Se si pone

$$Q(t) = \bar{q}(t) - q(t) \ \text{ per } \ a \leq t \leq b,$$
$$d = \sigma - \alpha,$$

si ottiene

$$\dot{Q}(t) = \tilde{f}_x(t)^T Q(t), \ \begin{bmatrix} -Q(a) \\ Q(b) \end{bmatrix} = dM = d\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$Q(t) = Q(b)Z(t) = dM_2 Z(t),$$
$$dM_2 Z(a) = Q(a) = -dM_1,$$

$$< \tilde{f}_u(t)^T[q(t) + dM_2Z(t)] + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)\bar{v}(t), w(t) > \geq 0 \quad \text{q.d.}$$

per ogni $w(.) \in \mathcal{V}(a,b)$.
Dunque esistono $v_1(.) \in \mathcal{V}(a,c)$ e $\eta_1(.)$ come in (A'4) e quindi si ha

$$0 > < \eta_1(c), \bar{q}(c) > + \int_a^c < \tilde{H}_{xx}\eta_1 + \tilde{H}_{xu}v_1, \eta > dt =$$

$$= \int_a^c < \tilde{f}_u(t)^T\bar{q}(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)\bar{v}(t), v_1(t) > dt \geq 0,$$

poiché l'integrando é ≥ 0 q.d. . Questo é assurdo e quindi il teorema é provato.

Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1 .- Il problema

$$\begin{cases} \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \longrightarrow \min \quad (\text{assunto in } \tilde{x}(.)\ ) \\ \dot{x}(.) \in PWC(a,b) \\ x(a) = A,\ x(b) = B \end{cases}$$

é di tipo (C) con

$$\begin{aligned} &l(x,y) = 0, \\ &\Phi(x,y) = (x - A, y - B), \\ &f(t,x,u) = u \in R^n = U = V(t) \end{aligned}$$

e la coppia $(\tilde{x}(.), \dot{\tilde{x}}(.))$ é un estremale normale.

Supponiamo $c \in]a,b[$ *coniugato con* b , allora esistono $\eta(.) \not\equiv 0$ e $q(.)$ assolutamente continue e tali che

$$\begin{cases} -\dot{q}(t) = \tilde{L}_{xx}\eta(t) + \tilde{L}_{xu}\dot{\eta}(t) \quad \text{per} \quad c \leq t \leq b, \qquad \eta(c) = 0 = \eta(b), \\ -q(t) = \tilde{L}_{ux}\eta(t) + \tilde{L}_{uu}\dot{\eta}(t) \quad \text{per} \quad c \leq t \leq b. \end{cases}$$

Supponiamo anche, per qualche costante $\mu > 0$,

$$\tilde{L}_{uu} \geq \mu I \quad \text{q.d. su} \quad [c,b].$$

Allora il sistema di equazioni precedente é equivalente al sistema

$$\dot{\eta}(t) = A(t)\eta(t) + B(t)q(t),\ c \leq t \leq b,$$

$$\dot{q}(t) = C(t)\eta(t) + D(t)q(t),\ c \leq t \leq b,$$

in cui $A(.), B(.), C(.), D(.) \in PWC$ e $\eta(c) = 0$.
Ne segue $\dot{\eta}(.)$, $\dot{q}(.) \in PWC$ e $q(c) \neq 0$, poiché $\eta(t) \not\equiv 0$.

Le funzioni $\eta(.)$, $q(.)$, $v(.) \equiv \dot{\eta}(.)$ verificano le condizioni (A1)-(A3) e il primo membro in (A3) é nullo quasi dappertutto. Nella condizione (A4) deve essere ora $d = 0 = \eta(t)$ per $a \leq t \leq c$ e quindi la condizione (A'4) assume la forma

$$< \eta_1(c), q(c) > < 0,\ \eta_1(c) = \int_a^c v_1(t)\, dt$$

Questa condizione é soddisfatta se si prende

$$v_1(t) = \frac{-1}{c-a} q(c) \quad \text{per} \quad a \leq t \leq c.$$

Pertanto c é *accoppiato con* b.
Esempio 2 .- Per il problema dell'Esempio 1 supponiamo che per $a < c < b$ esista $\bar{u} \neq 0$ tale che

$$< \tilde{L}_{uu}(c+0)\bar{u}, \bar{u} >< 0,$$

In [4] é provato che c é accoppiato con b.
Esempio 3 .- Supponiamo che nel problema (C) sia

$$l(x,y) = l(y),$$
$$\Phi(x,y) = (x - A, \phi(y)).$$

Supponiamo che $(\tilde{x}(.), \tilde{u}(.))$ sia un estremale e poniamo

$$\Gamma = \nabla^2 l(\tilde{x}(b)) + \gamma \nabla^2 \phi(\tilde{x}(b))$$
$$M = \nabla \phi(\tilde{x}(b))$$

Supponiamo che $c \in]a,b[$ sia *coniugato con* b *in senso generalizzato* secondo [4], ossia supponiamo che esistano $v(.) \in \mathcal{V}(c,b)$ e $\eta(.)$, $q(.) \in AC(c,b)$ tali che

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{f}_x(t)\eta(t) + \tilde{f}_u(t)v(t) \quad \text{q.d. su} \quad [c,b],$$
$$\eta(c) = 0 = M\eta(b),$$
$$-\dot{q}(t) = \tilde{f}_x^T(t)q(t) + \tilde{H}_{xx}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{xu}(t)v(t) \text{ q.d. su } [c,b],$$
$$q(c) \neq 0, \; q(b) = \Gamma\eta(b) + \alpha N, \; \alpha \text{ costante },$$
$$< \tilde{f}_u^T(t)q(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)v(t), v(t) > \leq 0 \text{ q.d. su } [c,b]$$

e inoltre , se nell'ultima formula precedente il primo membro é nullo quasi dappertutto, allora esistono $v_1(.) \in \mathcal{V}(a,b)$ e $\eta_1(.) \in AC(a,b)$ tali che

$$\dot{\eta}_1(t) = \tilde{f}_x(t)\eta_1(t) + \tilde{f}_u(t)v_1(t) \quad \text{q.d. su} \quad [a,b],$$
$$\eta_1(c) = 0 = N\eta_1(b),$$
$$< \eta_1(c), q(c) > < 0,$$
$$< \tilde{f}_u^T(t)q(t) + \tilde{H}_{ux}(t)\eta(t) + \tilde{H}_{uu}(t)v(t), v_1(t) > \leq 0 \text{ q.d. su } [c,b]$$

In [5] é provato che c é accoppiato con b.

Sempre in [5] sono prodotti esempi di punti accoppiati con b, ma non coniugati in senso generalizzato.

BIBLIOGRAFIA

1. L.Cesari, *Optimization- Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.
2. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
3. M. R. Hestenes, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley, New York, 1964.
4. P. D. Loewen, H. Zheng, *Admissible directions and generalized coupled points for optimal control problems*, Nonlinear Anal. T. M. A. **26, 3** (1994), 771–91.
5. V. Zeidan, *Generalized conjugate points for optimal control problems*, Nonlinear Anal. T. M. A. **22, 6** (1996), 479–507.
6. V. Zeidan, P. Zezza, *The conjugate point condition for smooth control sets*, J. Math. Anal. Appl. **132** (1988), 572–89.